Espaces vectoriels I

Introduction aux espaces vectoriels

Définition 1. *Soit E un ensemble muni d'une loi interne "+" et d'une loi externe "." définies par :*

$$\begin{array}{rl} + : E \times E & \to E \\ (u_1, u_2) & \mapsto u_1 + u_2 \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rl} . : K \times E & \to E \\ (\lambda, u) & \mapsto \lambda.u \end{array}$$

*On dit que $(E, +, .)$ est un **espace vectoriel** sur $\mathbb{R}$, ou $\mathbb{R}$-espace vectoriel, ssi les propriétés suivantes sont vérifiées :*

1. $\forall (u_1, u_2) \in E^2, u_1 + u_2 = u_2 + u_1$ *(commutativité de la loi +)*
2. $\forall (u_1, u_2, u_3) \in E^3, u_1 + (u_2 + u_3) = (u_1 + u_2) + u_3$ *(associativité de la loi +)*
3. $\exists 0_E \in E : \forall u \in E, u + 0_E = u$ *(0_E élément neutre de +)*
4. $\forall u \in E, \exists u' \in E : u + u' = 0_E$ *(u' est le symétrique de u, noté $-u$)*
5. $\forall u \in E, 1_{\mathbb{R}}.u = u$
6. $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall u \in E, \lambda.(\mu.u) = (\lambda\mu).u$
7. $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall (u_1, u_2) \in E^2, \lambda.(u_1 + u_2) = \lambda.u_1 + \lambda.u_2$
8. $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall u \in E, (\lambda + \mu).u = \lambda.u + \mu.u$

Remarque importante : *la notation* $\begin{array}{rl} + : E \times E & \to E \\ (u_1, u_2) & \mapsto u_1 + u_2 \end{array}$ *contient l'information que la somme de 2 éléments de E est un élément de E (ensemble d'arrivée). E est dit stable par addition.*

Exercice 1. On considère les ensembles suivants :

— $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, qui désigne l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$
— $\mathcal{F}_+ = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f \geq 0\}$
— $\mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f \text{ dérivable sur } \mathbb{R}\}$
— $\mathbb{R}^2$, qui est l'ensemble des couples de nombres réels
— $\mathbb{R}^3$, qui est l'ensemble des triplets de nombres réels
— $\mathcal{E} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y \geq 0\}$
— $S_0 = \{f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) + f(x) = 0\}$
— $\mathbb{R}_2[X] = \{aX^2 + bX + c \mid (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\}$, qui est l'ensemble des polynômes de degrés inférieur ou égal à 2
— $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, qui est l'ensemble des suites à valeurs réelles
— $\mathcal{U} = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1 \text{ ou } \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -1\}$

Pour chacun de ses ensembles :

1. Donner trois éléments différents.
2. Faire la somme des deux premiers. On remarque au passage que chacun de ces ensembles dispose d'une addition.
3. Le résultat d'une addtion reste-t-il toujours dans l'ensemble ?

Lorsqu'un ensemble E a une addition (on note $(E, +)$), si :

$$\exists x_0 \in E : \forall x \in E, x_0 + x = x + x_0 = x$$

x_0 s'appelle élément neutre de E pour la loi +. On le note souvent 0_E.

4. Pour les ensembles ci-dessus, trouver, s'il existe, l'élément neutre pour +.

Soit x un élément de $(E, +)$. Si :

$$\exists x' \in E : x + x' = x' + x = 0_E$$

on dit que x' est le symétrique de x pour la loi +. On dit aussi que x' est l'opposé de x.

5. Déterminer les opposés des éléments donnés à la questions 1. Ces opposés restent-ils toujours dans l'ensemble de départ ?
6. Pour les différents ensembles ci-dessus, est-il possible de multiplier un élément par un réel quelconque ? Si oui, le résultat reste-t-il dans l'ensemble ?

Exercice 2. On se place dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^2$.
1. Illustrer sur une figure les axiomes 1, 2, 3 et 4 à l'aide des vecteurs $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $u_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.
2. Illustrer les axiomes 6, 7 et à l'aide des des vecteurs $u = u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et des scalaires $\lambda = 2$ et $\mu = 3$.

Exercice 3. On munit $\mathbb{R}^2$ de la loi $+_{\mathbb{R}^2}$ définie par $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} +_{\mathbb{R}^2} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}$ et de la loi $._{\mathbb{R}^2}$ définie, pour $\lambda \in \mathbb{R}$, par $\lambda ._{\mathbb{R}^2} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix}$. Soient $u = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \end{pmatrix}$, $\lambda = 4$ et $\mu = -1$.
1. Calculer $u +_{\mathbb{R}^2} v$, $\lambda ._{\mathbb{R}^2} u$, $\mu ._{\mathbb{R}^2} v$, $\lambda ._{\mathbb{R}^2} u +_{\mathbb{R}^2} \mu ._{\mathbb{R}^2} v$.
2. Déterminer $-u$ et $-v$.
3. Prouver que $(\mathbb{R}^2, +_{\mathbb{R}^2}, ._{\mathbb{R}^2})$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Exercice 4. 1. Trouver $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$ tels que $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.
2. Représenter graphiquement.

Exercice 5. Trouver $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$ tels que $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 6. Soit $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 2x + y = 0\}$. Soient $u = (x, y) \in E$ et $v = (x', y') \in E$.
1. Prouver que $u + v \in E$.
2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Prouver que $\lambda u \in E$.
3. Représenter graphiquement E.
4. E est-il un espace vectoriel ?

Exercice 7. Soit $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = 1\}$.
1. Représenter graphiquement E.
2. Prouver que E n'est pas un espace vectoriel.

Exercice 8. Soit $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x + 3y - z = 0\}$. Soient $u = (x, y, z) \in E$ et $v = (x', y', z') \in E$.
1. Prouver que $u + v \in E$.
2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Prouver que $\lambda u \in E$.
3. E est-il un espace vectoriel ?

Exercice 9. Soit $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | -x + y - 3z = 0\}$. Prouver que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Exercice 10. Soit $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x + 3y - z = 2\}$. E est-il un espace vectoriel ?

Exercice 11. Soit $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x - y^2 = 0\}$. E est-il un espace vectoriel ?

Propriétés d'un espace vectoriel

Exercice 12. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Soit $u \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. A l'aide des axiomes définissant un espace vectoriel, prouver les règles de calcul suivantes :
1. $0.u = 0_E$
2. $\lambda .0_E = 0_E$
3. $(-1).u = -u$
4. $\lambda .u = 0_E \Leftrightarrow \lambda = 0$ ou $u = 0_E$

Exercice 13. $(E, +, .)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. On note 0_E l'élément neutre pour $+$.
1. En utilisant certains axiomes des espaces vectoriels, prouver que 0_E est unique.
Soit $u \in E$ et $u' \in E$. On suppose que $u + u' = 0_E$.
2. Prouver que u' est unique.

Exercice 14. Soit $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites réelles. Prouver que E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Exercice 15. On note $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On définit, pour $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $g \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $(f + g)$ par $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ et (λf) par $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$. $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est-il un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ?

Exercice 16. Soit F l'ensemble des fonctions f continues sur $[0;1]$ telles que $\int_0^1 xf(x)dx = 0$. F est-il un espace vectoriel ?

Exercice 17. On considère l'équation différentielle $y'' - 5y = 0$. Prouver que l'ensemble des solutions réelles (à variable réelle) de cette equation est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Vecteurs

Définition 2. *Soit* $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ *et* $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ *deux vecteurs de* $\mathbb{R}^n$. *On appelle produit scalaire de* $\overrightarrow{u}$ *et de* $\overrightarrow{v}$ *le nombre :*

$$< \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} >= u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n$$

On le note aussi $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$. *On dit que* $\overrightarrow{u}$ *et* $\overrightarrow{v}$ *sont orthogonaux si* $< \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} >= 0$.

Exercice 18. Soit $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.
1. Caculer $< \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} >$. $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont-ils orthogonaux ?
2. Représenter graphiquement l'ensemble $\{\overrightarrow{w} \in \mathbb{R}^2 \mid \overrightarrow{w}.\overrightarrow{u} = 0\}$ puis l'ensemble $\{\overrightarrow{w} \in \mathbb{R}^2 \mid \overrightarrow{w}.\overrightarrow{u} \geq 0\}$.

Exercice 19. Soit $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 2x+1 \\ -x+3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} x \\ x+1 \end{pmatrix}$. Trouver tous les x pour lesquels $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ sont orthogonaux.

Exercice 20. Soit $\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{x_0} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.
1. Calculer $\overrightarrow{x} - \overrightarrow{x_0}$.
2. Calculer $\sqrt{< \overrightarrow{x} - \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x} - \overrightarrow{x_0} >}$. Quelle formule retrouve-t-on ?

Exercice 21. Soit $\overrightarrow{u_1} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{u_2} = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$.
1. Prouver que $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ sont orthogonaux.
2. Application : sans calcul, trouver un vecteur orthogonal à $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Représenter graphiquement.