Géométrie

Exercice 1. Soient $A(-\frac{1}{2};1)$, $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ et $\mathcal{D}$ la droite passant par A et dirigée par $\overrightarrow{u}$.
1. Donner un paramétrage de $\mathcal{D}$.
2. Donner une équation cartésienne de $\mathcal{D}$.
3. Donner un vecteur normal à $\mathcal{D}$.

Exercice 2. Soient $A(x_A;y_A)$, $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix}$ et $\mathcal{D}$ la droite passant par A et dirigée par $\overrightarrow{u}$.
1. Donner un paramétrage de $\mathcal{D}$.
2. Donner une équation cartésienne de $\mathcal{D}$.
3. Donner un vecteur normal à $\mathcal{D}$.

Exercice 3. On se place dans $\mathbb{R}^2$. On considère la droite $\mathcal{D}$ d'équation $-x + \frac{2}{5}y + 1 = 0$.
1. Trouver un vecteur normal à $\mathcal{D}$.
2. Donner un vecteur directeur de $\mathcal{D}$.
3. Donner un paramétrage de $\mathcal{D}$

Exercice 4. On se place dans $\mathbb{R}^2$. On considère la droite $\mathcal{D}$ d'équation $\frac{1}{2}x - y - 1 = 0$.
1. Trouver un vecteur normal à $\mathcal{D}$.
2. Donner un vecteur directeur de $\mathcal{D}$.
3. Donner un paramétrage de $\mathcal{D}$

Exercice 5. On se place dans $\mathbb{R}^2$. On considère la droite $\mathcal{D}$ d'équation $ax + by + c = 0$.
1. Prouver que le vecteur $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à $\mathcal{D}$.
2. Prouver que le vecteur $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$.

Exercice 6. On considère la droite du plan dont un paramétrage est :

$$\begin{cases} x = 2 - t \\ y = -3 + 2t \end{cases}$$

1. Trouver un vecteur directeur de cette droite.
2. Donner l'équation cartésienne de cette droite.

Exercice 7. Soient $A(1,1,1)$, $B(-1,0,3)$ et $C(2,2,0)$.
1. Justifier que A, B et C ne sont pas alignés.
2. Déterminer un paramétrage du plan (ABC).
3. Donner un vecteur normal à (ABC).
4. Donner une équation cartésienne de (ABC).
5. Une telle équation est-elle unique ?

Exercice 8. Soient $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$. On considère le point $A(1,-1,2)$. Soit $\mathcal{P}$ le plan passant par A et dirigé par $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.
1. Donner un paramétrage du plan $\mathcal{P}$.
2. Déterminer une équation cartésienne de $\mathcal{P}$.

Exercice 9. On considère la droite de $\mathbb{R}^3$ dont un système d'équations cartésiennes est

$$\begin{cases} x + 2y + z - 1 = 0 \\ -2x - y + 3z - 2 = 0 \end{cases}$$

1. Trouver deux points distincts de la droite.
2. En déduire un vecteur directeur de cette droite.
3. Donner un paramétrage de la droite.

Exercice 10. On considère la droite de $\mathbb{R}^3$ dont un système d'équations cartésiennes est

$$\begin{cases} x+z+2=0 \\ x-y+z=0 \end{cases}$$

1. Trouver deux points distincts de la droite.
2. En déduire un vecteur directeur de cette droite.
3. Donner un paramétrage de la droite.

Exercice 11. On considère la droite de l'espace dont un paramétrage est :

$$\begin{cases} x &= 1-t \\ y &= 2t \\ z &= -4+3t \end{cases}$$

1. Trouver un vecteur directeur de cette droite.
2. Donner un système d'ééquations cartésiennes de cette droite.

Exercice 12. On considère la droite de l'espace dont un paramétrage est :

$$\begin{cases} x &= 5t \\ y &= 3 \\ z &= -2+t \end{cases}$$

1. Trouver un vecteur directeur de cette droite.
2. Donner un système d'ééquations cartésiennes de cette droite.

Exercice 13. Si $\overrightarrow{X}$ et $\overrightarrow{Y} \in \mathbb{R}^2$, on note $<\overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y}>$ le produit scalaire canonique.
1. Prouver que $\forall(\overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y}) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2, <\overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y}> = <\overrightarrow{Y}, \overrightarrow{X}>$.
2. Prouver que $\overrightarrow{X} \mapsto <\overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y}>$ est linéaire.
3. Prouver que $\overrightarrow{Y} \mapsto <\overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y}>$ est linéaire.
4. Prouver que $\forall \overrightarrow{X} \in \mathbb{R}^2, <\overrightarrow{X}, \overrightarrow{X}> \geq 0$.
5. Prouver que $\forall \overrightarrow{X} \in \mathbb{R}^2, <\overrightarrow{X}, \overrightarrow{X}> = 0 \Rightarrow X = \overrightarrow{0}$.

Exercice 14. Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^2$ et $t \in \mathbb{R}$.
1. Prouver que $t \mapsto ||\overrightarrow{u} + t\overrightarrow{v}||_2^2$ est un polynôme de degré 2 en t.
2. Calculer le discriminant de ce polynôme.
3. En déduire que $|<\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}>| \leq ||\overrightarrow{u}||_2.||\overrightarrow{v}||_2$.

Exercice 15. Prouver que $||\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}||_2 \leq ||\overrightarrow{u}||_2 + ||\overrightarrow{v}||_2$