Matrices

Définition d'une matrice

Exercice 1. Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $A+B$, $A-B$ et $A+2B$.
2. Peut-on calculer $A+C$ et $B+C$? Justifier.
3. Déterminer les transposées de A, B et C.

Exercice 2. Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}$, où $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Déterminer les valeurs de α et β telles que $A - B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Multiplication de matrices

Définition 1. *Soient $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $B = (b_{i,j}) \in \mathcal{M}_{p,q}(R)$. Alors, le produit $C = AB$ est une matrice de taille $n \times q$ dont les coefficients $c_{i,j}$ sont définis par $\forall (i,j) \in [\![1;n]\!] \times [\![1;q]\!], c_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} b_{k,j}$*

Exercice 3. Calculer les produits suivants :

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 3 & -4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 20 \\ 5 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Exercice 4. Effectuer le produit des matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} d & e & f \end{pmatrix}$$

Exercice 5. Soient A une matrice d'ordre 3 définie par $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer $B = (A - 6I_3) \times (A^2 - 3I_3)$.

Exercice 6. Décomposition en colonnes. On note $A = \begin{pmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $C_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, $C_2 = \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix}$.

1. Calculer AX.
2. Exprimer AX à l'aide de C_1 et C_2. Que constate-t-on ?

Proposition 1. *Formule du binôme de Newton. Soit $(A,B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2$ tel que $AB = BA$ (A et B commutent). Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} A^k B^{n-k}$*

Exercice 7. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. En utilisant la formule du binôme de Newton, calculer A^n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 8. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. En utilisant la formule du binôme de Newton, calculer A^n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 9. Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Prouver : $[\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), AX = BX] \Rightarrow A = B$

Exercice 10. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2 et A^4.
2. Conjecturer une formule pour A^{2n} (vérifier que votre formule fonctionne pour $n = 1$)
3. Prouver cette formule par récurrence.
4. En déduire une formule pour A^{2n+1}.

Exercice 11. Trouver une base du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et en déduire la dimension.

Exercice 12. Trouver $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $MN \neq NM$.

Exercice 13. Soit $A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ et $u = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$.
1. Calculer $A(\frac{\pi}{3})$, puis $A(\frac{\pi}{3}) \times u$.
3. Calculer $A(\theta) \times A(\theta')$.

Définition de l'inverse d'une matrice

Définition 2. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (ensemble de matrices carrées de taille n à coefficients réels). On dit que A est inversible s'il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $AB = BA = I_n$. Dans ce cas, B est unique et B se note alors A^{-1}.*

Exercice 14. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soient B et $B' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB = BA = I_n$ et $AB' = B'A = I_n$. Démontrer que $B = B'$.

Exercice 15. Le but de cet exercice est de présenter une méthode particulière de calcul de l'inverse d'une matrice. Soient les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que $B = A + 4I_3$.
2. Trouver une relation simple entre B et B^2.
3. En déduire une relation reliant A, A^2 et I_3.
4. En déduire que A est inversible et calculer A^{-1}.

Exercice 16. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
1. Calculer A^2 et vérifier que $A^2 = A + 2I_3$.
2. Montrer que A est inversible et calculer son inverse.

Exercice 17. A et B sont deux matrices carrées de même taille telles que $AB = A + B$. Prouver que $AB = BA$ (*indication* : considérer $(A - I_n)(B - I_n)$).

Calcul de l'inverse d'une matrice

Exercice 18. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$.
1. Calculer AB.
2. Rappeler quelle égalité doit vérifier B pour être l'inverse de A. Exprimer cette condition sous la forme d'un système.
3. A l'aide de ce système, exprimer a en fonction de $ad - bc$ et h, b en fonction de ad_bc et f, c en fonction de $ad - bc$ et g et d en fonction de $ad - bc$ et e.
4. Quelle condition cette égalité impose-t-elle aux coefficients a, b, c et d ?
5. Exprimer e, f, g et h en fonction de a, b, c et d.
6. En déduire une formule pour A^{-1}.

Exercice 19. Calculer l'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ par deux méthodes.

Exercice 20. Calculer l'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$:
1. en utilisant la méthode de Gauss
2. via la résolution du système : $\begin{cases} 3x + 2y - z = x' \\ x - y + z = y' \\ 2x - 2y + z = z' \end{cases}$
3. en utilisant la formule, si $\det A \neq 0$, $A^{-1} = \frac{1}{\det A} {}^t(\text{com}A)$